

量子霍尔效应

王韩腾, 李欣蔚, 张子豪

(北京大学物理学院 2013 年 6 月 4 日)

摘要: 量子霍尔效应的发现是新兴低维凝聚态物理发展中的一件大事, 分数量子霍尔效应的发现更是开创了一个研究多体现象的新时代, 并将影响到物理学的很多分支。这个领域两次被授予诺贝尔物理学奖, 引起了人们很大的兴趣。文章介绍了霍尔效应的发展历程, 主要包括 1897 年霍尔效应、1980 年冯·克利青发现整数量子霍尔效应、1982 年崔琦等发现的分数量子霍尔效应以及最近才由薛其坤带领团队所完成的反常量子霍尔效应。本文最后讨论量子霍尔效应在实际中的应用。

关键词: 霍尔效应; 量子霍尔效应; 反常霍尔效应; 应用

一、经典霍尔效应

1879 年, 霍尔在研究载流导体在磁场中的受力性质时发现: 在均匀磁场 \mathbf{B} 中放入一块板状金属导体, 当电流垂直于磁场 \mathbf{B} 方向流过导体时, 在垂直于电流和磁场的方向导体两侧会产生一个横向电场。这种现象便是经典霍尔效应。

在电子发现之前, 人们不能认识到霍尔效应现象产生的本质, 直到 19 世纪末电子的发现以及对电子研究的不断深入, 使霍尔效应的理论研究不断取得突破性的成果。由于霍尔效应的大小直接与样品中的载流子浓度相关, 故在凝聚态物理领域获得了广泛的应用, 成为金属和半导体物理中一个重要的研究手段。

现在我们考虑用最经典的 Drude 的自由电子气模型来分析霍尔效应(原理图见图 1), 在电场 \mathbf{E} 与磁场 \mathbf{B} 同时存在的情形下, 单电子准经典动力学方程为

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{p}}{\tau} \quad (1.1)$$

考虑稳态情况 $\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0$, 电流密度 $\mathbf{J} = -en\mathbf{v}$, 则(1.1)式写为分量形式

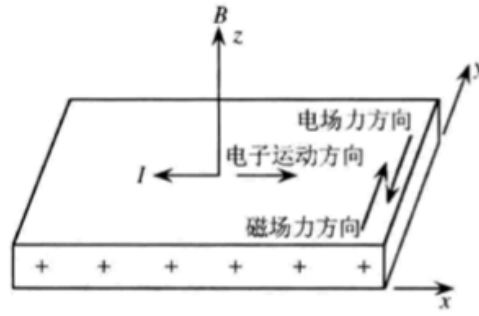


图 1: 霍尔效应示意图

$$\begin{cases} \sigma_0 E_x = J_x + \omega_c \tau J_y \\ \sigma_0 E_y = -\omega_c \tau J_x + J_y \end{cases} \quad (1.2)$$

其中 $\omega_c = \frac{eB}{m}$ 称为回旋频率， $\sigma_0 = \frac{ne^2}{m\tau}$ 为未加磁场下的电导率。

当 y 方向没有电流时，y 方向会有稳定的电场 E_y 出现，由(1.2)立即得到

$$E_y = -\frac{B}{ne} J_x \quad (1.3)$$

E_y 可理解为与电子所受洛伦兹力相平衡的电场。

由此定义霍尔系数

$$R_H = \frac{E_y}{J_x B} = -\frac{1}{ne} \quad (1.4)$$

霍尔系数仅依赖于自由电子气的电子密度，与金属的其他参数无关。这是一个非常简单的结果，提供了对自由电子气体模型正确性最直接的检验方式。

一些金属元素室温下的霍尔系数^[1]

元素	Z	$R_H/(10^{-10} \text{m}^3 \text{C}^{-1})$	$-1/R_H ne$
Li	1	-1.7	0.8
Na	1	-2.5	1.0
K	1	-4.2	1.1
Cu	1	-0.55	1.3
Ag	1	-0.84	1.3
Au	1	-0.72	1.5

Be	2	+2.44	-0.10
Zn	2	+0.33	-1.4
Cd	2	+0.60	-1.1
Al	3	-3.0	0.1

关于上述数据的两点讨论：

- (1) 从电子气体理论上，有结果 $-1/R_H ne$ 应该为 1。从表中可以看出，对一价碱金属符合的很好，对一价贵金属就符合较差。而对于一些二、三价金属就连符号都预言地是相反的，仿佛此时的载流子是带正电的，这是自由电子气体模型所无法解释的。

派尔斯（1928 年）曾对这种符号反常现象进行了解释。这种不能采用自由电子气解释并会给出正号的载流子，后来海森堡称之为“空穴”，利用能带理论能够给出很自然的解释。

- (2) 横向磁阻表示在与电流方向垂直的外磁场作用下，在电流方向电阻的变化，此处即电阻率 $\rho(B) = E_x/J_x$ 的变化。对于稳态情形（即 y 方向没有电流），由(1.2)给出 $J_x = \sigma_0 E_x$ ，意味着自由电子气横向磁阻为零。但对于金属的测量表明，实际上往往不为零，有时甚至相当大。

虽然自由电子气模型在以上两方面无法给出准确的实验结果，但是对下面讨论 1980 年发现的整数量子霍尔效应却是相当不错的。为了接下来讨论整数量子霍尔效应的方便，我们需要由(1.2)引入电导率张量 σ_{ij} （称为静态磁致电导率张量）：

$$\vec{\sigma} = \frac{\sigma_0}{1+(\omega_c\tau)^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_c\tau & 0 \\ \omega_c\tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(\omega_c\tau)^2 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

其中 σ_{xx} ， σ_{xy} 分别称为电导率张量的纵向分量和横向分量。

求电导率张量的逆矩阵自然地就得到电阻率张量的各个分量。一般性在实验中，如果使用的是霍尔电压法，则可以精确地测量 ρ_{xx} 和 ρ_{xy} ，而使用霍尔电流法则直接得到 σ_{xx} 和 σ_{xy} 的值。

二、 量子霍尔效应

1. 整数量子霍尔效应 (IQHE)

1980 年德国物理学家冯·克利青 (K. von Klitzing) 等多次研究在处于极低温度 1.5K 和强磁场 18T 的作用下, 硅的金属-氧化物-半导体场效应晶体管 (MOSFET), 在二维体系的霍尔效应实验中, 发现了一个与经典霍尔效应完全不同的现象 (实验结果见图 2):

- (1) 当门电压 (用于控制样品的载流子浓度) 到某一定值, 在电流方向上的电压 V_x 毫无争议地趋于零, 仿佛有效电导 σ_{eff} 是无穷大。
- (2) 在门电压具有相同间隔的位置附近出现一系列霍尔电压平台; 在这些平台处, 霍尔电阻率 $\rho_{yx} = V_H/I_x$ (即 σ_{yx} 的倒数) 都精确地等于 $(25813/\text{整数})$ 欧姆, 其中 25813 是以欧姆给出的 h/e^2 的值。

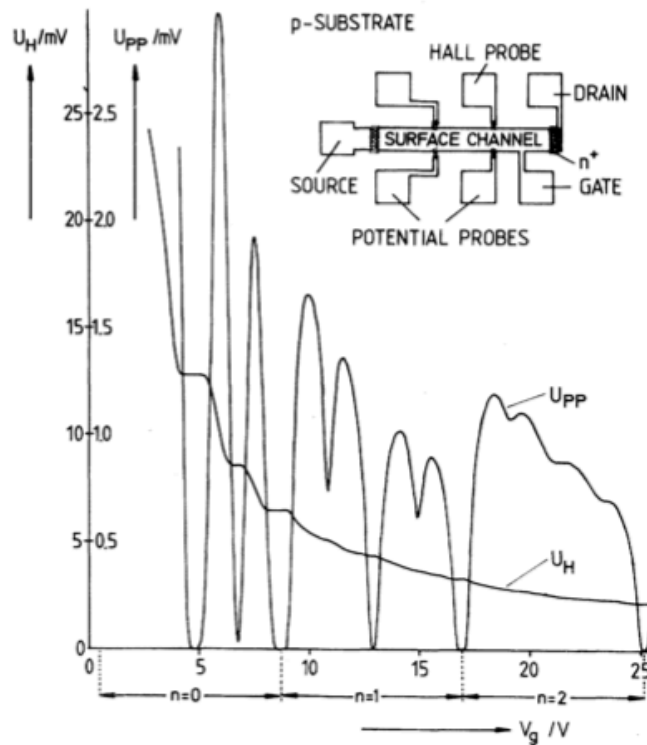


图 2: 首次 IQHE 测量结果。其中磁场 (180T) 由纸面向外, 温度为 1.5K。在源极与漏极之间有一个 $1\mu\text{A}$ 的稳恒电流, 电压 V_{pp} 与 V_H 均作为门电压 V_g 的函数画出其变化曲线, V_g 与费米能级成比例。引自 K. von Klitzing, G.Dorda, and M. Pepper^[3]

令人惊讶的是平台值折算成 ρ_{yx} 后, 与 $h/(ve^2)$ ($v=1,2,3,\dots$) 的相对误差在

首次实验中即小于 10^{-5} 。目前，平台平整度已达到 10^{-8} ，绝对值的精度已达到 10^{-7} 。实验还表明，与材料体系是 Si MOSFET 还是 GaAs-AlGaAs 异构体结构，载流子是电子还是空穴，以及样品的几何等无关，上述结果是一种普适现象。由于其精确性、稳定性和可复现性，量子霍尔电阻 $h/(ve^2)$ 已被正式定为电阻的计量标准。

为了解释霍尔效应中霍尔电导 σ_{xy} 的精确量子化效应，下面介绍 Laughlin 的规范理论（1981 年）^[4]：

考虑如图 3 所示的二维圆筒。圆筒的周长（x 方向）为 L ，外加磁场 B 处处垂直于圆筒的表面。假设圆筒的中心由于电流而产生了额外的磁通量 Φ ，那么一个电子的等效哈密顿量中的磁矢势就由两部分构成： B 引起的 A 、磁通 Φ 引起的 A_g 。

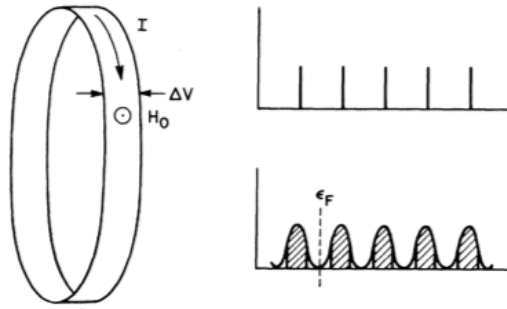


图 3：左图：环状的金属带，沿电流方向称为 x 轴，金属带宽度方向 y 轴。右图：态密度随能量的分布；右上是没杂质的朗道能级，右下虚线为费米能。引自 R. B. Laughlin^[4]

不难看出：

$$A_g = \Phi / L \quad (2.1)$$

那么体系中沿着 x 方向的电流 I 可以表示成（注：以下推导使用高斯制）

$$I = c \frac{\partial U}{\partial \Phi} = \frac{c}{L} \frac{\partial U}{\partial A_g} \quad (2.2)$$

其中 U 是体系的能量。

实际上，我们可以通过规范变换

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla f, \quad f = -A_g x \quad (2.3)$$

将哈密顿量中的 A_g 消去，不过这时波函数要进行如下变换：

$$\psi(x, y) \rightarrow \psi(x, y) \exp(-ieA_g x / \hbar c) \quad (2.4)$$

为了使存在 A_g 与否不改变物理问题, 这时波函数需要满足周期性边界条件:

$$\psi(x, y) = \psi(x + L, y) \quad (2.5)$$

那么由(2.4)及(2.5)得到:

$$\exp(ieA_g L / \hbar c) = \exp[2\pi i(\Phi / \phi_0)] = 1 \quad (2.6)$$

即要求

$$\Phi = n\phi_0 \quad (2.7)$$

其中, n 为整数 $\phi_0 = \hbar c / e$ 是磁通量子

一般地, 当磁通量 Φ 的大小不满足量子化条件(2.7)时, 存在 A_g 与不存在 A_g 的情形是不等价的, 这时电子状态是受到磁通量 Φ 的影响。下面我们具体来看看电子状态是如何受磁通量 Φ 变化的影响。考虑如下形式单电子哈密顿量

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + eE_0 y \quad (2.8)$$

其中 E_0 表示 y 方向的电场强度。取朗道规范 $\mathbf{A} = -yB\mathbf{e}_x$, 则哈密顿量化为

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} B y \right)^2 + \hat{p}_y^2 \right] + eE_0 y \quad (2.9)$$

可以证明, 上面哈密顿量的本证波函数具有如下形式:

$$\psi_{k,n}(x, y) = e^{ikx} \varphi_n(y) \quad (2.10)$$

将(2.10)代入定态薛定谔方程

$$H\psi_{k,n} = E_{k,n}\psi_{k,n} \quad (2.11)$$

由于哈密顿量不显含坐标 x , 所以有

$$\left\{ \frac{1}{2m} \left[\left(\hbar k - \frac{e}{c} B y \right)^2 + \hat{p}_y^2 \right] + eE_0 y \right\} \varphi_n(y) = E_{k,n} \varphi_n(y) \quad (2.12)$$

经过恒等变形

$$\left\{ \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_0)^2 \right] + eE_0 y_0 + \frac{1}{2} m \left(\frac{cE_0}{B} \right)^2 \right\} \varphi_n(y) = E_{k,n} \varphi_n(y) \quad (2.13)$$

其中 $y_0 = \frac{1}{\omega_c} \left(-\frac{\hbar k}{m} - \frac{cE_0}{B} \right)$, $\omega_c = eB / mc$

不难看出(2.13)是谐振子的定态薛定谔方程（差了一个平移项），故其本征能量 $E_{k,n}$ 与本征波函数可以直接写出

$$E_{k,n} = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c + eE_0 y_0 + \frac{1}{2} m \left(\frac{cE_0}{B} \right)^2 \quad (2.14)$$

$$\psi_{k,n}(x,y) = e^{ikx} \varphi_n(y - y_0) \quad (2.15)$$

从(2.14)可以看出，外加电场 E_0 的作用仅仅是将朗道能级 $\left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_c$ 产生了大小为 $eE_0 y_0 + \frac{1}{2} m \left(\frac{cE_0}{B} \right)^2$ 的平移，对朗道能级的结构特征没有影响。

本征波函数(2.15)通过其中心坐标 y_0 受磁矢势增量 $\Delta A_g = \Delta \Phi / L$ 的影响，即

$$y_0 \rightarrow y_0 - \Delta A_g / B \quad (2.16)$$

由(2.14)可知，本征能量的变化与 ΔA_g 成比例，将(2.2)化为改变量形式

$$I = c \frac{\Delta U}{\Delta \Phi} \quad (2.17)$$

考虑费米能级位于能隙中的情形，当磁通量 Φ 绝热地变化磁通量子 $\phi_0 = hc/e$ 时（即 $\Delta \Phi = \phi_0$ ），由于规范不变性，体系回到原来状态，总的效果是有 ν 个电子由体系的一端（ $y=0$ ）移动到体系的另一端（ $y=L_y$ ）。因此能量变化为

$$\Delta U = \nu e V_H \quad (2.18)$$

其中 V_H 是圆筒两边缘沿 y 方向电压，即霍尔电压

由(2.17)及(2.18)马上得到：

$$I = \nu \frac{e^2}{h} V_H \quad (2.19)$$

马上我们就得到霍尔电导

$$\sigma_{xy} = \nu \frac{e^2}{h} \quad (2.20)$$

至此，我们很愉快地给出了在霍尔平台上的霍尔电导的结果。但是 Laughlin 的规范理论，对于整数 ν 应该等于什么并没有给出证明，而只是简单地假定整数 ν 是费米能级以下的能级数目，即有 ν 个朗道能级被电子填充。

以上我们在解释整数霍尔效应时都是用的单电子模型，即既忽略了电子-电子相互作用，由忽略了电子-晶格相互作用，仅仅考虑了在强磁强 B 和霍尔电压

V_H 产生的效应。这种忽略可以简单并且很好的解释整数量子霍尔效应，然而却无法从理论上预言接下来的新结果：分数量子霍尔效应（FQHE）

2. 分数量子霍尔效应（FQHE）

虽然发现整数量子霍尔效应给我们带来了崭新的物理内容，但是理解它所需的理论工作却在当时以及具备。与此对照，1982 年，崔琦等人发现的分数量子霍尔效应，在理论上提出了全新的问题。目前，人们已经知道，分数量子霍尔基态是具有很强相关的二维电子液体。近年，凝聚态物理中许多重大的发现都与这类二维强相关电子体系有着密切的联系。

分数量子霍尔效应是多体问题中相当成功地进行了理论解释的，但是在实际应用中，分数量子霍尔效应还没有特别重要的应用。

下面介绍分数霍尔效应的发现实验。

1982 年，美籍华人物理学家崔琦以及施特默进一步研究量子霍尔效应（实验结果见图 4），他们在更低的温度、更强的磁场的条件下，在更纯净的样品 GaAs-AlGaAs 异质结界面上建立一个量子阱，限制电子成为二维电子气。当温度降至 0.1K、磁场增加 20T 时，观测到霍尔电阻平台具有更精细的台阶结构。这些平台对应的不是原来量子霍尔效应的整数值，而是分数值，因而称为分数量子霍尔效应。

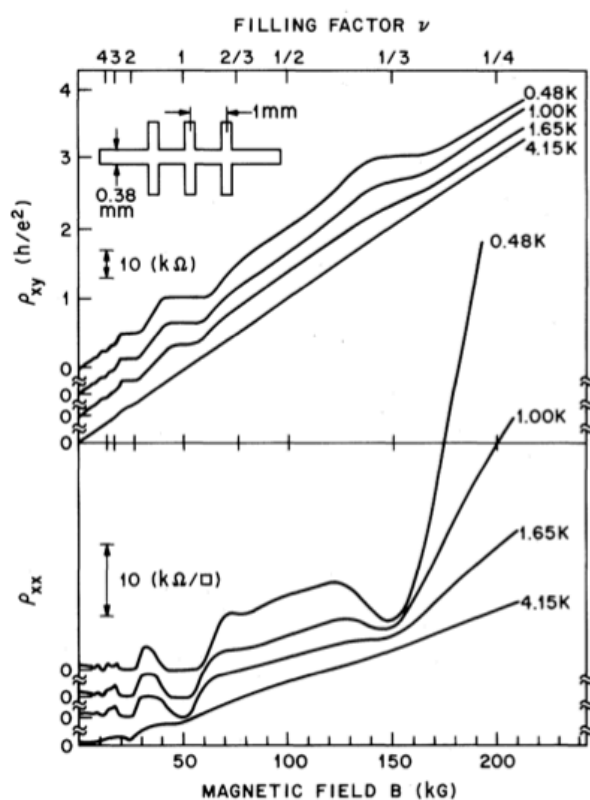


图 4: 图为 GaAs-AlGaAs 样品的分数量子霍尔实验, ρ_{xy} 和 ρ_{xx} 随磁场 B 的变化。样品载流子浓度 $n=1.23 \times 10^{11}/\text{cm}^2$, 控制电流 $I=1\mu\text{A}$, 朗道能级填充因子 $\nu = nh / eB$

引自: D. C. Tsui^[6]

我们具体来看下崔琦等人的实验结果：

当填充因子 $\nu > 1$ 时，随着磁场 B 的增加，费米能级通过朗道能级能隙中的局域态，在 $i=4, 3, 2$ 和 1 处出现整数量子霍尔效应。当 $\nu < 1$ （称为极端量子极限），温度等于 4.15K 时， ρ_{xy} 和 ρ_{xx} 对磁场的依存关系都呈线性，与自由电子模型所预言的结果相一致。随着温度的降低，在 $\nu = 1/3$ 附近，偏离自由电子的行为变得越来越明显。当温度 $T=0.48\text{K}$ 时，这种偏离在 $\rho_{xx} - B$ 曲线上发展成为明显的极小。在相应的 $\rho_{xy} - B$ 曲线上出现量子数为 $1/3$ 的霍尔平台，即 $\rho_{xy} = 3h/e^2$ 。另外，在 $T=0.48\text{K}$ 时，在 $\nu = 2/3$ 附近有一个很弱的结构。

崔琦等人的发现触发了大量独创性的实验研究工作。迄今为止，已报道了大量的使用具有更高迁移率的样品，在更低温度和更强磁场条件下进行的实验，以至人们发现了各种不同的分数填充因子 ν 的霍尔效应。

关于分数量子霍尔效应，Laughlin 也提出了自己的理论，其核心内容是 Laughlin 波函数，它描述的体系是强关联量子液体。鉴于这个理论的复杂性，就不在本文中详细的介绍，只是简单地指出这是一个对 $\nu = 1/m$ （ m 为奇数）的非常成功的解释。因为这项工作使得 Laughlin 同崔琦、Stormer 共同分享了 1998 年的诺贝尔物理学奖。

三、反常霍尔效应

1. 反常霍尔效应

在铁磁性的金属材料样品中，横向电阻率 ρ_{xy} 除了包含和磁感应强度 B 有关的一项之外，还有一项是和样品的磁化强度 M 大小有关的反常项，当样品达到饱和磁化强度 M_s 时，它就变成了常数。实验测得的 ρ_{xy} 和 B 的关系曲线下页如图 5 所示：

可以看出，先随 ρ_{xy} 迅速线性增加，经过一个拐点达到饱和之后线性缓慢增加。显然，这一现象不能用磁场的洛伦兹力来解释。因而，通常人们称这种现象为反常霍尔效应。根据经验公式：

$$\rho_{xy} = R_0 B + 4\pi R_s M \quad (3.1)$$

其中 R_s 称为反常霍尔系数，通常它大于常规霍尔系数 R_0 至少一个量级以上，且强烈依赖于温度。在铁磁性金属中，即使没有外加磁场 B ，也会出现霍尔电压。

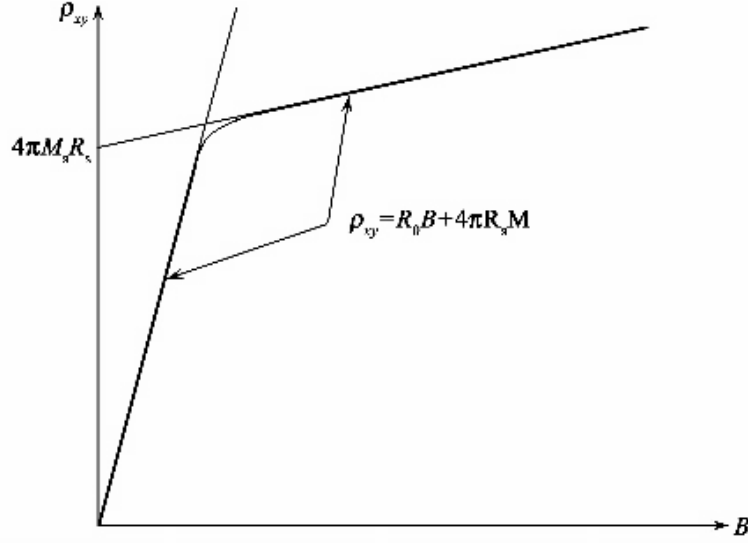


图 5: 反常霍尔效应 ρ_{xy} 和 B 的关系曲线

对于反常霍尔效应有很多种理论解释，目前最为通行的是从自旋-轨道耦合的角度来解释这一现象。1954年，Karplus 和 Luttinger 从理论上研究了自旋-轨道耦合作用对自旋极化巡游电子的输运影响，并提出了反常霍尔效应的内禀机制。

在哈密顿量中加入一项来表示电子在磁化介质中的轨道-自旋耦合：

$$H_{split} = h\hat{m} \cdot s \quad (3.2)$$

在理想晶体中，按照布洛赫波定律，波函数：

$$|\psi_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})\rangle = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} |u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})\rangle \quad (3.3)$$

其中 n 是能带指标， \mathbf{k} 是波矢， \mathbf{r} 是空间坐标。晶体中载流子在外加电磁场中的准经典运动可以用布洛赫波函数组成的波包来表示，由理论推导可以得到：

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial \epsilon_n}{\partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega} \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{k}} = -\frac{e}{\hbar} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}) \quad (3.5)$$

其中 $\boldsymbol{\Omega}_n$ 为贝里曲率：

$$\boldsymbol{\Omega}_n = -\text{Im} \langle \nabla_{\mathbf{k}} u_n | \times | \nabla_{\mathbf{k}} u_n \rangle \quad (3.6)$$

可以看出运动方程右边的第二项就是前面提到的反常速度，它和 \mathbf{B} 无关，方向垂直于 \mathbf{E} 。正是这个反常速度给出反常霍尔效应的内禀根据。利用波尔兹曼输运理论，积分整个布里渊区内所有占据能带的贝里曲率：

$$\boldsymbol{\Omega}^z(\mathbf{k}) = \sum f_n \boldsymbol{\Omega}_n^z(\mathbf{k}) \quad (3.7)$$

从而给出晶体的反常霍尔电导率：

$$\sigma_{xy} = -\frac{e^2}{h} \int_{BZ} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \Omega^z(\mathbf{k}) \quad (3.8)$$

实验测量结果与理论预言符合得非常好，这说明了反常霍尔效应内禀机制的存在，即外在机制在反常霍尔效应中不占主导地位。

2. 量子反常霍尔效应

有经典的反常霍尔效应，就会有量子版本的反常霍尔效应。量子反常霍尔效应与量子霍尔效应最大的区别就是前者不需要外磁场。理论上对量子反常霍尔效应早有预言，但由于所需要的材料必须是具有铁磁性的拓扑绝缘体，实现起来难度非常大。

2013年，我国的薛其坤教授带领他的研究团队成功的制备出了量子反常霍尔体系。他们通过在(Bi,Sb)2Te3薄膜中掺入铬的方法获得具有铁磁性的拓扑绝缘体，并在没有外加磁场的情况下观察到了霍尔电阻的存在，并达到了理论预测值 h/e^2 。有关结果发表在Science杂志上。

四、 应用

1. 精细结构常数的测定

精细结构常数 α 是最重要的基本物理常数之一，表征带电粒子与电磁场的相互作用，精确测定精细结构常数具有重要意义。

(1) 精细结构常数的概念

1913年，玻尔发表了关于原子结构的氢原子理论。1915年，索莫菲考虑到电子绕核高速运动时相对论效应的影响，提出了椭圆轨道理论，该理论将玻尔理论进一步向前推广。在索莫菲理论中，氢原子的能量可表示成

$$E_n = -\frac{2\pi^2me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2n^2h^2} - \frac{Rhc\alpha^2}{n^4} \left(\frac{n}{n_\psi} - \frac{3}{4} \right) + \dots \quad (4.1)$$

其中 α 为常数，且

$$\alpha = \frac{2\pi e^2}{4\pi\epsilon_0hc} \approx \frac{1}{137} \quad (4.2)$$

其中 e 是基本电荷， ϵ_0 是真空电容率， c 是光速

(2) 几种测定精细结构常数的方法

a) 利用兰姆位移测 α 的值

$$\Delta V_{\text{兰}} = \frac{RC\alpha^3}{3\pi} \left[\left(\ln \frac{k_0}{k} - \ln 2 + \frac{11}{24} \right) - \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right] \quad (4.3)$$

其中 $\ln \frac{k_0}{k} = 7.6876$, 得 $\alpha^{-1} = 137.0388$

b) 利用电子的反常磁矩测 α 的值

$$\alpha_e = A \left(\frac{\alpha}{\pi} \right) + B \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + C \left(\frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + \dots \quad (4.4)$$

其中 $A = 0.5$, $B = -0.3284784458$, $C = 1.184 \pm 0.007$, $\alpha^{-1} = 137.036007$

c) 利用测定氢的超精细结构分裂测 α 的值

$$\Delta V_H = \frac{16}{3} rRC\alpha^2 \frac{\mu^2}{\mu_B^2} \quad (4.5)$$

$$\alpha^{-1} = 137.03597 \quad (4.6)$$

d) 利用测定 $2e/h$ 的值测 α 的值

按照约瑟夫森效应

$$V = \frac{2eU}{h} \quad (4.7)$$

可得 $2e/h$, 理论上给出 $2e/h$ 与 α 的关系为

$$\alpha^{-1} = \left[\frac{(\mu'_p/\mu_B)(2e/h)C}{4R_{Bo}r'_p} \right]^{\frac{1}{2}} = 137.0359 \quad (4.8)$$

(3) 量子霍尔效应测定精细结构常数

精细结构常数

$$\alpha = \frac{e^2 \mu_0 c}{h} \frac{1}{2} \quad (4.9)$$

量子霍尔效应中, 霍尔电阻

$$R_H = \frac{h}{e^2 i} = \frac{\mu_0 c}{2\alpha}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.10)$$

在 SI 单位中, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$, $c = 2.99792458 \text{m/s}$ 是精确值, 故可以通过测量霍尔电阻 R_H 的方法测定 α 。

这一方法最早由 K. v. Klitzing 于 1980 年在其发表的论文《New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance》中提出, 具有精确性、稳定性和可重复性的优点。

测量电路如下页图 6 所示, 由一个电池 U_0 、一个标准电阻 R_N 、量子霍尔电阻 R_H 和一个限流电阻组成 R_V 组成, DVM 为数字电压表。 α 的值可直接从标准电

阻和 h/e^2 电阻两端电压降的比率确定。

在 1981 年 6 月的第二届精密测量和基本常数国际会议上,有三个不同的研究组发表了用量子霍尔电阻得到的精细结构常数,他们的初步结果是:

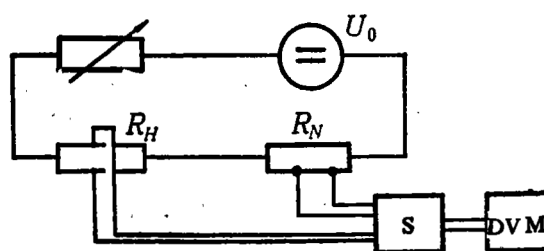


图 6: 量子霍尔效应测量精细结构常数

$$\alpha^{-1} = 137.03651 \pm 0.000049 \quad (\text{美国})$$

$$\alpha^{-1} = 137.03589 \pm 0.00012 \quad (\text{日本})$$

$$\alpha^{-1} = 137.03582 \pm 0.00018 \quad (\text{西德})$$

目前实验中用量子霍尔效应法测得的 α 的相对标准不确定度已达 24×10^{-9}

2. 建立电阻的自然基准

(1) 电阻基准的改进

1893 年国际度量衡局规定用实物来复现的国际单位,规定在 0°C 时长为 106.3cm、质量为 14.4521g 的水银柱的电阻为一国际欧姆。用这种方法定义的电阻单位在复现和使用上均较方便,但是其准确度不易进一步提高。主要是由于做成横截面十分均匀的水银柱,技术上有很大困难,另外,水银柱随着温度等外界环境条件的波动而发生的变化也较大。后来由于绝对测量电学单位技术的进步,开始复现出较准确的绝对欧姆,并在 1948 年国际计量大会上正式决定停止使用国际欧姆而改用绝对欧姆。

50 年代以前,绝对欧姆都是通过计算自感的方法复现的。其准确度约为 10^{-5} 量级。60 年代以后,发展了计算电容的方法来测定绝对电阻,准确度提高了两个数量级,达到 10^{-7} 左右。

以上复现电阻单位的方法虽然其精度不断提高,但都是基于经典物理,其中心部件加工复杂,很难制造。因此,有必要建立欧姆的新的实用基准,新的实用基准应具有更好的长期稳定性和精确的可复现性。

(2) 自然基准

自然基准是反映物质运动自然规律的基本物理常数导出的单位基准。20 世纪 60 年代以前,用绝对测定方法复现的电磁单位的量值用实物基准来保存。绝

对测定的不确定度只能达到 $10^{-6} \sim 10^{-7}$ 量级。实物基准的年变化约为 $10^{-7} \sim 10^{-8}$ 量级。这种状况不能满足科学研究和生产的要求。60年代以来发展起来的自然基准为电学基准开创了新的局面。自然基准所复现的量值不受时间、地点、材料、样品尺寸、温度等各种因素的影响，具有很高的复现性和稳定性。

(3) 电阻自然基准

电阻自然基准建立在量子霍尔效应的基础上。量子霍尔效应中的霍尔电阻

$$R_H = \frac{h}{e^2 i} = \frac{R_k}{i}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.11)$$

R_H 的数值仅决定于 $R_k = h/e^2$ 这个自然常数和整数 i ，因此量子化的霍尔电阻为我们提供了一种电阻的自然基准。

1990年1月1日，由国际度量衡委员会（CIPM）推荐的欧姆的自然基准开始生效，约定

$$R_k = 25812.807\Omega \quad (4.12)$$

具有极高的精确度。

3. 在质量单位定义中的应用

当前在7个基本SI单位中，大都已经实现新的定义，但质量单位是较难由基本物理常数或基本原子属性定义的，而质量单位的实物基准——保存在国际计量局的质量原器每年都在以较大的量级变化，因此质量单位用物理常数定义是国际计量界当前的重点研究项目，其主要突破方向之一是采用功率天平，用电学的方法测量千克。如图7所示，其原理是用电学力反冲一个质量的重量，在磁场 B 中长度为 L 的线路中的电流 i 产生反冲力为 $F = BLi$ 。如果质量与重量平衡，则 $M = BLi/g$ ，但对其中 BL 的测量很难达到要求的准确度，目前解决这个问题的方法是通过磁场中的线圈，测量线圈移动的速度 v 以及产生的电压 V ，可以得到 $BL = V/v$ ，进而使 $M = Vi/vg$ ，其中 v 可用一个与铯原子钟相连的激光干涉仪得

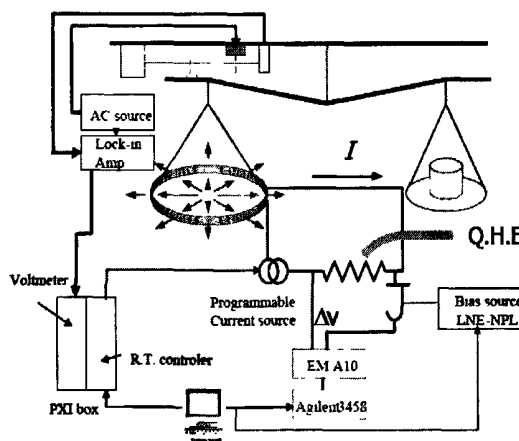


图7：质量单位的定义

图7所示，其原理是用电学力反冲一个质量的重量，在磁场 B 中长度为 L 的线路中的电流 i 产生反冲力为 $F = BLi$ 。如果质量与重量平衡，则 $M = BLi/g$ ，但对其中 BL 的测量很难达到要求的准确度，目前解决这个问题的方法是通过磁场中的线圈，测量线圈移动的速度 v 以及产生的电压 V ，可以得到 $BL = V/v$ ，进而使 $M = Vi/vg$ ，其中 v 可用一个与铯原子钟相连的激光干涉仪得

到, 而 V 和 i 可以利用约瑟夫森效应和量子霍尔效应准确测得。由于电压的单位定义为 $2e/h$, 电阻的单位定义为 h/e^2 , 所以 $Mgv = Vi = V^2/R = h/4$, 从而将质量单位也建立在基本常数——普朗克常数上。这就是量子霍尔效应在质量单位定义中的作用。

参考文献

- [1] 阎守胜. 固体物理基础[M]. 北京大学出版社. 2000
- [2] Kittel C. Introduction to Solid State Physics. New York: John Wiley & Sons, 1976. 杨顺华等译. 固体物理导论[M]. 北京: 北京大学出版社. 1988
- [3] K. V. Klitzing, G. Dorda and M. Pepper. New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on Quantized Hall Resistance [J]. Phys. Rev. Lett. 45(1980): 494-497
- [4] R. B. Laughlin. Quantized Hall conductivity in two dimensions [J]. Phys. Rev. B 23, 5632(1981)
- [5] 陈颖健. 量子霍尔效应[M]. 北京: 科学技术文献出版社. 1993
- [6] D. C. Tsui, H. L. Stormer and A. C. Gossard. Two-Dimensional Magnetotransport in the Extreme Quantum Limit [J]. Phys. Rev. Lett. 45, 1559(1982)
- [7] Karplus R, Luttinger J M. Hall Effect in ferromagnetics [J]. Physical Review, 1954, 95(5): 1154.
- [8] Sundaram G, Niu Q. Wave-packet dynamics in slowly perturbed crystals: Gradient corrections and Berry-phase effects [J]. Physical Review B, 1999, 59(23): 14915.
- [9] Chang C Z, Zhang J, Feng X, et al. Experimental Observation of the Quantum Anomalous Hall Effect in a Magnetic Topological Insulator [J]. Science, 2013.
- [10] Williams E R, Steiner R L, Newell D B. An Accurate Measurement of the Planck Constant [J]. Physical Review Letters, 1998, 81(12): 2404 - 2407